Анықталмаған интегралдар

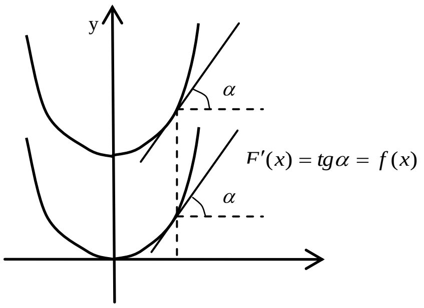
Анықталмаған интеграл. *f(x)* және *F(x)* функциялары ақырлы немесе ақырсыз Х аралықта анықталған функциялар болсын.

Анықтама. *Х аралығында дифференциалданатын* $F(x)$ *функциясы*

$$F'(x) = f(x)$$

теңдігін қанағаттандырса F(x) функциясы f(x) функциясының ***алғашқы функциясы*** *деп аталады.*

Мысалы, $F(x)=x^3$ функциясы $f(x)=3x^2$ функциясының алғашқы функциясы болады, себебі



$$F'(x) = \left(x^3\right)' = 3x^2 = f(x)$$

$F'(x)$ туындының геометриялық мағнасы $y=F(x)$ функциясына x нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті. Сонда, $f(x)$ функцияның алғашқы функциясын табу дегеніміз x нүктеде жүргізілген жанамасының бұрыштық коэффициенті сол нүктедегі $f(x)$ функциясының мәніне тең болатын $y=F(x)$ қисығын табу деген сөз, яғни

$$F'(x) = tg\alpha = f(x).$$

$f(x)$ функцияның алғашқы функциясы бірмәнді анықталмаған. Шынында да, мысалдағы $f(x)=3x^2$ функцияларының алғашқы функциялары ретінде мына функцияларды алуымызға болады: x^3+1, x^3-5, x^3+C, мұндағы *C*-қандай да бір нақты сан (себебі, бұл функциялардың туындысы $3x^2$ болады). Жалпы жағдайда айтсақ, $f(x)$ функцияның алғашқы функциясы $y=F(x)$ табылса, онда $F(x)+C$ функциясы да $f(x)$ функцияның алғашқы функциясы болады, себебі $\left(F(x)+C\right)' = F'(x)+0 = f(x)$. Геометриялық тұрғыдан қарастырсақ, $F'(x) = tg\alpha = f(x)$ шартын қанағаттандыратын бір $y=F(x)$ функция табылса, онда функция графигін Оу осі бойымен С шамаға жылжыту арқылы осы шартты қанағаттандыратын қисықтарды аламыз (бұлай жылжыту бұрыштық коэффициентті өзгертпейді).

Мынадай теорема дұрыс болады.

Теорема. ***Егер X аралығында*** $F(x)$ ***және Ф(х) функциялары f(x) функциясының алғашқы функциясы болса, онда қандай да бір С саны табылып, мына теңдік орындалады:***

$$\Phi(x) = F(x)+C.$$

Бұл теоремадан егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда $\boldsymbol{F(x)+C}$ өрнегі *f(x)* функциясының барлық **алғашқы функцияларының жиынын** беретіндігі шығады.

Анықтама. *f(x) функциясының алғашқы функцияларының жиыны оның* ***анықталмаған интегралы*** *деп аталады және* $\int f(x)dx$ *деп белгіленеді,* мұндағы $\int$ - интеграл белгісі; *f(x)* – интеграл астындағы функция; *f(x)dx* - интеграл астындағы өрнек. Сонымен,

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \qquad (1)$$

мұндағы *F(x)* – алғашқы функция, *C* –ерікті тұрақты.

Мысалдағы, $f(x)=3x^2$ функциясының алғашқы функциясы $F(x)=x^3$ болғандықтан, анықтама бойынша $\int 3x^2dx = x^3 + C$.

Берілген функцияның алғашқы функциясын табу амалы **функцияны интегралдау** деп аталады. Функцияны интегралдау амалы дифференциалдау амалына кері амал.

Интеграл анықтамасынан мынадай қасиеттер шығады.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$**.**

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$**.**

3. $\int dF(x) = F(x)+C.$

4. Берілген аралықта $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының алғашқы функциялары бар болса, онда $f(x)+g(x)$ функциясының да алғашқы функциясы бар болады және

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

5. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$**.**

6. Егер $\int f(x)dx = F(x)+C$ болса, онда

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ F(ax+b)+C.$$

7. Егер интеграл астындағы функцияның алымы бөлімнің туындысы болса, онда интеграл бөлімнің абсолют шамасының натурал логарифміне тең, яғни $\int \frac{u'dx}{u} = \ln|u| + C$, мұндағы $u=u(x)$.

Анықталмаған интегралдар кестесі:

1	$\int 0dx = C$	2	$\int 1dx = x+C$
3	$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \ x>0,$ $\alpha \neq -1$	4	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert+C,\ \ x\neq 0$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,$ $0 < a \neq 1$	6	$\int e^x dx = e^x + C$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$	8	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}dx = tgx+C,$ $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$	10	$\int \frac{dx}{\sin^2 x}dx = -ctgx+C,$ $x \neq k\pi$
11	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x+C,$ $-1<x<1$	12	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C,$ $-a<x<a$
13	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx+C$	14	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\, artg\frac{x}{a}+C$
15	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$ $+C$	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+k}\right\rvert + C$